Zagadnienie Transportowe a Problem układania planu zajęć

Bogdan Drozdowski

11 marca 2011

1 Wstęp

Problem układania planu zajęć polega na dopasowaniu zajęć, ich prowadzących, uczestników, miejsc i terminów tak, by nie powodować kolizji, czyli aby żadne dwa zajęcia nie odbywały się w tym samym czasie i miejscu, a żadni uczestnicy nie mieli zajęć w jednej chwili w więcej niż jednym miejscu.

Zagadnienie Transportowe polega na optymalizacji sposobu transportu towaru tak, by zminimalizować czas lub koszty jego transportu (lub równoważnie – by zmaksymalizować własny zysk).

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie sposobu na sprowadzenie problemu układania planu zajęć do Zagadnienia Transportowego.

2 Sprowadzenie

Niech:

- S - zbiór sal,
- G - zbiór grup (słuchaczy),
- P - zbiór prowadzących zajęcia,
- C - zbiór możliwych czasów rozpoczęcia zajęć.

Zasobami, które należy rozdzielić, są sale powiązane z godzinami rozpoczęcia zajęć, a odbiorcami są prowadzący zajęcia powiązani z grupami słuchaczy. Zbiorem producentów jest więc zbiór $S \times C$, a zbiorem odbiorców - $P \times G$.

Niech:

- liczba producentów $m = \overline{\overline{S \times C}}$,
- liczba odbiorców $n = \overline{\overline{P \times G}}$,
- wielkość produkcji $A_i = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$ (każda para sali i godziny może być wykorzystana tylko przez jedne zajęcia),
- wielkość zapotrzebowania $B_j = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$ (każda para prowadzącego i słuchaczy może mieć tylko jedne zajęcia na raz),
- koszt przyporządkowania zajęć do sal i terminów będzie stały, na przykład

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & j = n + 1 \qquad \text{(w przypadku istnienia magazynu)} \end{cases}$$

Jeśli $m < n$ (liczba możliwych terminów jest mniejsza niż zajęć), zagadnienie nie ma rozwiązania.

Jeśli $m > n$ (nadwyżka produkcji nad potrzebami - otwarte Zagadnienie Transportowe), należy wprowadzić sztucznego odbiorcę (magazyn), którego zapotrzebowanie będzie pokrywać różnicę: $B_{n+1} = m - n$, dzięki czemu otrzymujemy zamknięte Zagadnienie Transportowe.

Przy tworzeniu funkcji kosztu należy wziąć pod uwagę następujące ograniczenia:

1. para $(s, c) \in S \times C$ nie może być przyporządkowana do więcej niż jednego odbiorcy,
2. para $(p, g) \in P \times G$ nie może być przyporządkowana do więcej niż jednego producenta (jedynym odbiorcą z wieloma producentami może być tylko dodatkowy odbiorca - magazyn).
3. grupa słuchaczy $g \in G$ nie może być przyporządkowana do więcej niż jednego producenta o jednej godzinie rozpoczęcia zajęć
4. prowadzący $p \in P$ nie może być przyporządkowany do więcej niż jednego producenta o jednej godzinie rozpoczęcia zajęć

Funkcję kosztu konstruujemy następująco:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + O_i M + K_i M + L_i M + N_i M) x_{ij}$$

lub, w przypadku gdy istnieje magazyn:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} (c_{ij} + O_i M + K_i M + L_i M + N_i M) x_{ij}$$

gdzie:

- $X = [x_{ij}]_{i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n}$ lub $X = [x_{ij}]_{i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n+1}$ (w przypadku istnienia magazynu) - macierz ilości przyporządkowanych sztuk par $(s, c) \in S \times C$ do odbiorców (czyli wielkość transportu od producenta do odbiorcy),

- O_i - współczynnik znajdowania kolizji zajęć:

$$O_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{m} x_{ij}$$

- N_i - współczynnik znajdowania kolizji terminów i sal:

$$N_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij}$$

- K_i - współczynnik znajdowania kolizji prowadzących:

$$K_i = \sum_{(p_i, g) \in P \times G} \sum_{j=1, j \neq i}^{m} x_{ij}$$

  gdzie p_i to prowadzący zajęcia w i-tym elemencie zbioru $P \times G$.

- L_i - współczynnik znajdowania kolizji słuchaczy:

$$L_i = \sum_{(p, g_i) \in P \times G} \sum_{j=1, j \neq i}^{m} x_{ij}$$

  gdzie g_i to grupa słuchaczy w i-tym elemencie zbioru $P \times G$.

- M - liczba wystarczająco duża, by funkcja kosztu znacznie urosła w przypadku przyporządkowania dwóch lub więcej par (s, c) do jednego odbiorcy, na przykład $M = (m + n + 1)$, ale może być stała.

Takie skonstruowanie funkcji kosztu (wraz z ograniczeniem wielkości produkcji i zapotrzebowania) powoduje preferowanie wyników, w których jedna para (s, c) jest przyporządkowana jednemu odbiorcy (poza ewentualnym magazynem).

3 Wnioski

Problem układania planu zajęć jest sprowadzalny do nieliniowego zamkniętego Zagadnienia Transportowego.